

Colles de Maths - semaine 10 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Intégrales généralisées

Exercice 1 Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t} dt$

Exercice 2 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b} dx.$$

Exercice 3 Pour quels réels α la fonction

$$f : x \mapsto x^\alpha \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1+t^2}} dt$$

est-elle intégrable sur \mathbb{R}_+^* ?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que f et f'^2 sont intégrables. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Théorèmes d'interversion

Exercice 5 Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}$.

Exercice 6 Soit f continue sur \mathbb{R}_+ et $a > 0$. Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^a \frac{f(t)}{\sqrt{t(a-t)}} dt$.

Exercice 7 Montrer que $\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 8 Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}.$$

En déduire une expression de $\ln 2$ sous forme de série.

Exercice 9 Donner un développement asymptotique à deux termes quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt.$$

Exercice 10 Soit $T > 0$ et $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

1. Déterminer la limite simple de la suite $g_n : t \in [0, T] \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u) e^{-kn(t-u)} du$.
2. On suppose que $\left(\int_0^T f(t) e^{nt} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $f = 0$.

Intégrales à paramètres

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose, pour $\alpha > 0$,

$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 f(t)^\alpha dt \right)^{1/\alpha}.$$

Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0 et $+\infty$.

Exercice 12 Soit $a, b > 1$. Calculer

$$\int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x} \right) dx.$$